Mécanique Rationnelle - É. Delhez
Évaluation du 28/10/2002

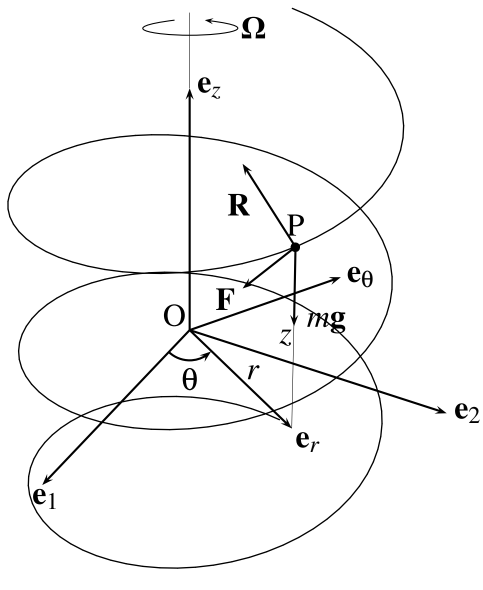
Consignes : *Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur l'état de votre compréhension du cours de Mécanique Rationnelle. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte.*
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de répondre aux questions ci-dessous en vous plaçant autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale (3 heures maximum). Les copies rentrées le 4 novembre seront corrigées et cotées puis restituées.
Vous pouvez décider de répondre aux questions en groupe et de remettre une seule copie pour le groupe. Dans ce cas, vous devrez être conscients des apports de chacun dans la résolution du problème.

Énoncé I - 15 points

On considère un point matériel de masse m se déplaçant sans frottement dans le champ de la pesanteur le long d'une hélice circulaire, d'axe vertical, de rayon R et de pas $2\pi\ell$ (Un tour complet correspond à un déplacement vertical d'une distance $2\pi\ell$). L'axe vertical de l'hélice passe par le point O, pris comme origine des axes. Le point matériel est en outre soumis à une force attractive $\mathbf{F} = -\mu^2 m\mathbf{s}$ (où $\mathbf{s}$ désigne le vecteur position du point matériel par rapport à O) de la part du point O.

L'hélice tourne à la vitesse constante Ω autour de son axe vertical.

1. Listez les forces appliquées au point matériel en indiquant la nature (force appliquée, force de liaison, force conservative, potentiel dont dérive la force...) et les caractéristiques principales de chacune d'elles.
2. Établissez l'équation différentielle vectorielle du mouvement dans les axes liés à l'hélice circulaire.
3. Déduisez-en une intégrale première scalaire.
4. Discutez les différents types de mouvements relatifs possibles.
5. Déterminez la(les) position(s) d'équilibre relatif du point matériel par rapport à l'hélice.
6. Étudiez (par la méthode de votre choix) la stabilité de la (des) position(s) d'équilibre identifiée(s) au point précédent. Calculez la fréquence des oscillations de la particule autour des éventuelles positions d'équilibre stable.
7. Déterminez la vitesse relative v avec laquelle il faut lancer le point matériel pour qu'il atteigne une hauteur ℓ au-dessus du point O si son point de départ est situé à une distance ℓ en-dessous de O.
8. Déterminez si l'énergie du point matériel est conservée au cours du mouvement. Expliquez.



1. Parmi les forces appliquées au point matériel, on compte deux forces conservatives :
   (a) la force de pesanteur $m\mathbf{g}$ qui dérive du potentiel $V_g = mgz$;
   (b) la force centrale $\mathbf{F} = -\mu^2 m\mathbf{s}$ qui dérive du potentiel $V_F = \dfrac{m\mu^2}{2}\|\mathbf{s}\|^2$.

   En plus, le guidage est assuré par une force de liaison $\mathbf{R}$. Celle-ci est perpendiculaire à la courbe puisqu'il n'y a pas de frottement. $\mathbf{R}$ peut se décomposer en une force dirigée selon la normale principale à la courbe (selon $\mathbf{e}_r$) et une force dirigée selon la binormale (dans le plan des vecteurs $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_z$). [1]
2. Dans les axes absolus, l'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} - \mu^2 m\mathbf{s} + \mathbf{R}$$

   Dans les axes liés à la courbe dont le vecteur de Poisson est $\mathbf{\Omega}$, on obtient

$$m\left(\frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\mathbf{\Omega}\wedge\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{s})\right) = m\mathbf{g} - \mu^2 m\mathbf{s} + \mathbf{R}$$

   où $\dfrac{\delta}{\delta t}$ désigne la dérivée temporelle dans les axes liés à la courbe.
3. En multipliant cette équation par la vitesse relative, qui est tangente à la courbe, on fait disparaître la réaction inconnue. On peut alors intégrer l'équation obtenue par rapport au

[1] Le trièdre local de Frenet est défini par

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}}{\left\|\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\ell^2}}(R\mathbf{e}_\theta + \ell\mathbf{e}_z)$$

$$\boldsymbol{\nu} = \rho\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\lambda} = \frac{\rho}{\sqrt{R^2+\ell^2}}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\theta} = \frac{-\rho R}{R^2+\ell^2}\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_r \qquad \text{puisque} \qquad \lambda = \sqrt{R^2+\ell^2}\,\theta$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau}\wedge\boldsymbol{\nu} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\ell^2}}\mathbf{e}_z - \frac{\ell}{\sqrt{R^2+\ell^2}}\mathbf{e}_\theta$$

temps et obtenir l'intégrale première suivante

$$\left\|\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2 + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{s})^2 - \Omega^2\|\mathbf{s}\|^2 = 2\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{s} - \mu^2\|\mathbf{s}\|^2 + \text{constante}$$

Utilisant les coordonnées cylindriques, on a

$$\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z = R\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$$

$$\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} = R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z = \frac{R}{\ell}\dot{z}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

où on a tenu compte des deux liaisons dues au mouvement sur l'hélice : $r = R$ et $z = \ell\theta$. Il est alors possible d'exprimer l'intégrale première obtenue en fonction de z, le seul degré de liberté du problème. On obtient

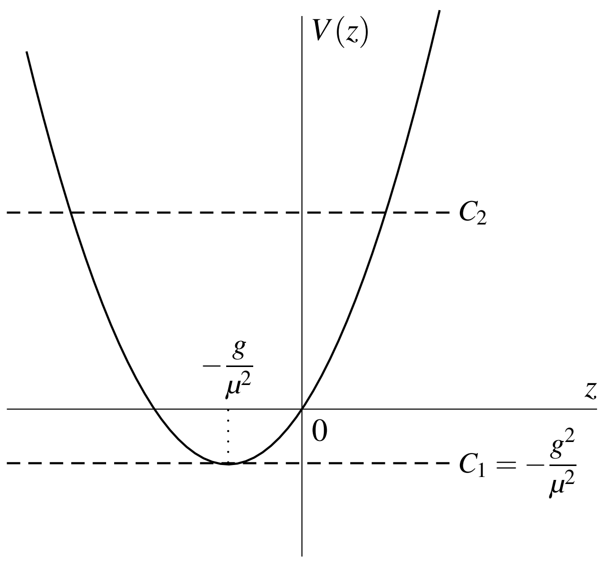
$$\dot{z}^2\left(1+\frac{R^2}{\ell^2}\right) + \mu^2 z^2 + 2gz = \text{constante}$$

4. Le mouvement relatif peut être étudié sur un diagramme de potentiel de

$$V = \mu^2 z^2 + 2gz$$

Les zéros de $V(z)$ sont $z = 0$ et $z = -\frac{2g}{\mu^2}$.

La fonction $V(z)$ présente un minimum en $z = -\frac{g}{\mu^2}$ et y vaut -$\frac{g^2}{\mu^2}$.



   (a) Quand la constante vaut $-\frac{g^2}{\mu^2}$, le point se trouve en équilibre relatif en $z = -\frac{g}{\mu^2}$.
   (b) Quand la constante est supérieure à cette valeur, le mouvement relatif est fait d'oscillations périodiques (bornées) autour de la position d'équilibre.

5. Il y a une seule position d'équilibre relatif en $z = -\frac{g}{\mu^2}$ correspondant au seul point stationnaire de V.

6. Ce point est un minimum du potentiel, il s'agit donc d'une position d'équilibre stable. Pour étudier le mouvement autour de cette position d'équilibre, il faut envisager une petite perturbation η de l'équilibre telle que

$$z(t) = -\frac{g}{\mu^2} + \eta(t)$$

En dérivant l'intégrale première par rapport au temps, on obtient l'équation différentielle pour la perturbation

$$\ddot{\eta} + \frac{\mu^2}{1+\frac{R^2}{\ell^2}}\eta = 0$$

Les oscillations autour de la position d'équilibre sont donc caractérisées par la fréquence

$$f = \frac{\mu}{2\pi\sqrt{1+\frac{R^2}{\ell^2}}}$$

7. Grâce aux conditions initiales données, il est possible de déterminer la constante d'intégration apparaissant dans l'intégrale première. En $t = 0$, on a

$$z = -\ell$$

$$\left\|\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}\right\| = \dot{z}\sqrt{1+\frac{R^2}{\ell^2}} = v$$

et donc

$$\text{constante} = v^2 + \mu^2\ell^2 - 2g\ell$$

Nous utilisons ensuite cette intégrale première pour exprimer que l'on atteint $z = \ell$ avec une vitesse nulle, ce qui donne

$$v = 2\sqrt{g\ell}$$

8. L'énergie n'est pas conservée car la force de réaction selon la binormale développe une puissance non nulle.

$$\mathbf{R}_\beta \cdot \dot{\mathbf{s}} \neq 0$$

Énoncé II - 5 points

Un disque horizontal rugueux tourne à la vitesse constante ω autour de son axe vertical. Où peut-on déposer un objet sur ce disque sans que cet objet se mette à glisser ?

Expliquez.

En raisonnant dans les axes en rotation avec le disque, on peut considérer que l'objet, assimilé à un point matériel, est soumis à la force fictive d'inertie

$$m\omega^2 r\mathbf{e}_r$$

(où m est la masse de l'objet, r la distance au centre et $\mathbf{e}_r$ le vecteur unitaire radial) qui tend à écarter l'objet du centre du disque.

La force de frottement s'oppose à cette tendance mais sa valeur maximale est donnée par $\mu_s mg$ où μ_s désigne le coefficient de frottement statique.

La distance au centre maximale à laquelle l'objet peut être déposé sans glisser est donc donnée par

$$m\omega^2 r_{max} = \mu_s mg \qquad \text{soit} \qquad r_{max} = \mu_s \frac{g}{\omega^2}$$

Pour tout $r > r_{max}$, l'objet se mettra à glisser. Pour $r \leq r_{max}$, par contre, il restera en place sur le disque.